

Impedanztomographie an Bäumen unter Berücksichtigung der Baumform

Thomas Günther

27. September 2005

Problemstellung

Das Problem der elektrischen Impedanztomographie wird beschrieben durch die Kontinuitätsgleichung für das elektrische Potential u

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad (1)$$

in einem beschränkten Gebiet Ω , auf dessen Berandung Γ die Randbedingung

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = j \quad (2)$$

gilt. Die Aufgabe besteht darin, die Leitfähigkeit σ aus gemessenen Randspannungen für eine Reihe von angelegten Stromdichten j zu rekonstruieren, stellt also ein inverses Parameter-Problem für eine elliptische Differentialgleichung dar. Anstatt der Leitfähigkeit wird oft auch der reziproke Wert $\rho = 1/\sigma$, der spezifische Widerstand verwendet. Er kann, ähnlich wie bei Gesteinen, auch bei Bäumen Variationen über mehrere Dekaden aufweisen.

Üblicherweise verwendet man eine vorinstallierte Kette von punktförmigen Elektroden, von denen über je zwei benachbarte Strom eingespeist wird und über die möglichen anderen Paare Spannungen abgegriffen werden. In der Geoelektrik entspricht dies dem Dipol-Dipol-Verfahren. Im allgemeinen sind aber beliebige 4-Punkt-Anordnungen denkbar und empfehlenswert, allerdings besitzen Dipolmessungen die besten Auflösungsseigenschaften. Eine gemessene Impedanz (Spannung Δu pro Stromstärke I) wird mit Hilfe eines Konfigurationsfaktors k in einen scheinbaren spezifischen Widerstand ρ^a umgewandelt

$$\rho^a = k \frac{\Delta u}{I} \quad .$$

Das hat den Vorteil, dass verschiedene Anordnungen leichter verglichen werden können und das Daten und Modell die gleiche Einheit besitzen, was sich günstig auf das inverse Problem auswirkt. Da dieses nichtlinear ist, wird iterativ das Modell verändert, bis die gemessenen Daten erklärt werden können. Das Gebiet wird in Elemente konstanten Widerstands unterteilt. Die Elementgröße sollte dabei dem physikalischen Auflösungsvermögen entsprechen und nicht unsinnig fein sein.

Vorwärtsrechnung

Fundamentaler Grundbaustein einer Inversionsrechnung ist die Vorwärtsaufgabe, d.h. die Simulation der Spannungen für eine vorgegebene Parameterverteilung. Da bis auf wenige Spezialfälle keine analytische Lösung vorhanden ist, löst man (1) approximativ mit Methoden der Finiten Differenzen (FD) oder Finiten Elementen (FE). Das Hauptproblem sind dabei die Punktelektroden, die eine unendliche Stromdichte an der Elektrode hervorrufen. Das Potential nimmt dort mit einem $1/r$ -Verhalten ab und kann nur durch ein Gitter sinnvoll approximiert werden, das in Elektrodennähe sinnvoll verfeinert ist.

Abhilfe schafft das Verfahren des Singularity Removal, bei dem das Potential u in einen singulären, aber bekannten Anteil u_p (Primärpotential) und einen unbekannt, aber regulären Anteil, das Sekundärpotential u_s , zerlegt wird. Für u_s gilt die Differentialgleichung

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u_s) = \nabla \cdot ((\sigma_0 - \sigma) \nabla u_p) \quad (3)$$

mit der Randbedingung

$$\sigma \frac{\partial u_s}{\partial n} = (\sigma_0 - \sigma) \frac{\partial u_p}{\partial n} \quad (4)$$

σ_0 ist dabei eine homogene Leitfähigkeitsverteilung mit dem Wert direkt an der Elektrode. Für exakte Kreisgeometrie kann dann u_p berechnet und zur Simulation von u_s benutzt werden. Da die singuläre Stromdichte beseitigt wurde, kann die Rechnung für u_s auf einem wesentlich moderaterem Gitter durchgeführt werden, was enorm Rechenzeit spart. Bei einer Abweichung von der Kreisgeometrie ist u_p aber nicht bekannt. Da eine Rechnung für u_s aber viele Male durchgeführt werden muss, lohnt sich der Aufwand einer einmaligen Berechnung von u_p .

So entstand die Dreigittertechnik: Ein relativ grobes Parametergitter definiert die Zellen, deren Widerstand zu bestimmen ist. Die Vorwärtsrechnung wird in jeder Iteration auf einem etwas feinerem, meist global verfeinerten, Sekundärfeldgitter durchgeführt. Auf einem lokal stark verfeinerten Primärfeldgitter wird einmalig zu Beginn das Primärfeld u_p berechnet. Sozusagen als Nebenprodukt fällt dabei der Topographieeffekt ab, d.h. wie sich eine Baumform ohne Berücksichtigung von Inhomogenitäten, auswirkt. Damit werden die wahren Konfigurationsfaktoren bestimmt.

Inversion

Um das inverse Problem zu quantifizieren, definiert man einen Modellvektor \mathbf{m} . Die einzelnen Elemente m_j beschreiben die jeweiligen Zellwiderstände ρ_j . Um negative spez. Widerstände zu vermeiden, wählt man oft deren Logarithmus $m_j = \log \rho_j$. Analog geht man bei den Daten vor: Der Datenvektor \mathbf{d} enthält die Logarithmen der scheinbaren spez. Widerstände, $d_i = \log \rho_i^a$. Jedem Datenpunkt d_i sei ein Fehlerwert ϵ_i zugeordnet, der entweder mit gemessen oder geschätzt wird.

Die Inversion beruht auf einer Minimierung der Quadratsumme der Abweichungen der Daten von der Modellantwort \mathbf{f} , gewichtet mit ihren Fehlern

$$\Phi_d = \sum_{i=1}^N \frac{d_i - f_i(\mathbf{m})}{\epsilon_i} = \|\mathbf{D}(\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m}))\|_2^2 \rightarrow \min \quad (5)$$

Die Matrix \mathbf{D} enthält dabei die Kehrwerte der Fehler auf der Hauptdiagonalen. Die Minimierung von Φ_d ist aber nicht korrekt gestellt, d.h. innerhalb der Messfehler gibt es eine ganze Mannigfaltigkeit von Modellen, welche die Daten befriedigen. Um das Problem zu regularisieren, führt man ein weiteres Funktional aus Nebenbedingungen ein

$$\Phi_m = \|\mathbf{C}(\mathbf{m} - \mathbf{m}^0)\|_2^2 \quad , \quad (6)$$

die Matrix \mathbf{C} stellt bspw. einen Ableitungsoperator dar, so dass „glatte“ Modelle bevorzugt werden. Man minimiert die Linearkombination $\Phi = \Phi_d + \lambda\Phi_m$. Der Regularisierungsparameter λ , der wichtigste Faktor in der Inversion, beschreibt die Stärke der Nebenbedingungen, also die Glätte des Modells. Er kann per Hand, d.h. nach Intuition oder Erfahrung, gesetzt werden. Es gibt auch Methoden zur Bestimmung optimaler λ , die aber nicht immer zuverlässige Ergebnisse bringen müssen. Letztlich ist entscheidend, dass die Daten im Rahmen ihrer Fehler (also nicht genauer!) angepasst werden, was mit dem Wert $\chi^2 = \Phi_d/N$ geschieht. Dieser liegt im Idealfall bei 1, für praktische Belange sind Werte unter 10 sinnvoll.

In jedem Iterationsschritt wird ein neues Modell \mathbf{m}^{k+1} aus dem vorhergehenden Modell \mathbf{m}^k berechnet

$$\mathbf{m}^{k+1} = \mathbf{m}^k + \tau^k \Delta \mathbf{m}^k \quad .$$

Die Schrittweite τ_k wird mit Hilfe eines Line-search-Algorithmus so bestimmt, dass Φ_d für den Bereich $0 \leq \tau \leq 1$ minimiert wird. Beim eingesetzten inexakten Line-search werden die einzelnen Funktionswerte zwischen \mathbf{m}^k und \mathbf{m}^{k+1} interpoliert.

Die Anwendung des Gauss-Newton-Verfahrens zur Minimierung von Φ führt zur Lösung von

$$\left(\mathbf{S}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{S} + \lambda \mathbf{C}^T \mathbf{C}\right) \cdot \Delta \mathbf{m}^k = \mathbf{S}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \left(\mathbf{d} - \mathbf{f}(\mathbf{m}^k)\right) - \lambda \mathbf{C}^T \mathbf{C}(\mathbf{m}^k - \mathbf{m}^0) \quad . \quad (7)$$

Die Sensitivitätsmatrix \mathbf{S} enthält dabei die Ableitungen der Modellantwortkomponenten nach den Modellparametern

$$S_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{m})}{\partial m_j} \quad ,$$

welche aus dem Potentialfeld auf dem Sekundärfeldgitter unter Zuhilfenahme des Reziprozitätsprinzips berechnet werden können.

Robuste Verfahren

Messdaten weisen oft einzelne fehlerbehaftete Daten auf. Da die Summe der Quadrate der Abweichungen minimiert werden (L_2 -Minimierung o. least squares), können diese Ausreißer einen sehr starken Einfluss auf das Ergebnis erhalten und eine vernünftige Anpassung verhindern. Eine Minimierung im L_1 -Sinne, also der Summe der Beträge (least absolute), ist wesentlich robuster gegen einzelne hohe Diskrepanzen, aber technisch viel schwieriger. Ein Ausweg ist das Konzept der iteratively reweighted least squares („robust inversion“). Dabei wird durch eine entsprechende Wichtung der Fehler L_1 -Verhalten in der L_2 -Minimierung aufgeprägt. Jenen Daten, die nicht angepasst werden können, werden höhere Fehler zugewiesen und ihr Einfluss sinkt in der Inversion. Die Folge ist eine bessere Datenanpassung im χ^2 -Sinne, teilweise können aber auch echte Anomalien unterschätzt werden.

Die gleiche Vorgehensweise lässt sich auch modellseitig durchführen („blocky model“): Dort, wo hohe Kontraste auftauchen, sinken die entsprechenden Wichtungsfaktoren. Dadurch kommt es in der Regel zu schärferen Kontrasten, die oft eher der Natur der Erde oder der Bäume entsprechen. Allerdings kann es dazu führen, dass die Regularisierung lokal verschwindet und unsinnige Widerstandswerte entstehen.

Eine Beschränkung der Widerstandswerte kann durch logarithmische Barrieren erfolgen: Dabei wählt man nicht $\log m_j$, sondern den Logarithmus der Differenz $m_j = \log(\rho_j - \rho_u)$ oder $m_j = \log(\rho_o - \rho_j)$ als Modell aus, wobei ρ_u und ρ_o eine untere bzw. obere Schranke für den Widerstand darstellen. Auch eine Kombination aus beiden ist möglich.

Ein synthetisches Beispiel

Wir wollen die Wirkungsweise an einem synthetischen Modell demonstrieren: Abb. 1 stellt die Widerstandsverteilung des Modells dar. In einem homogenen Gebiet von $100 \Omega\text{m}$ werden zwei hochohmige (200 und $500 \Omega\text{m}$) Objekt ein niederohmiger ($20 \Omega\text{m}$) Störkörper platziert.

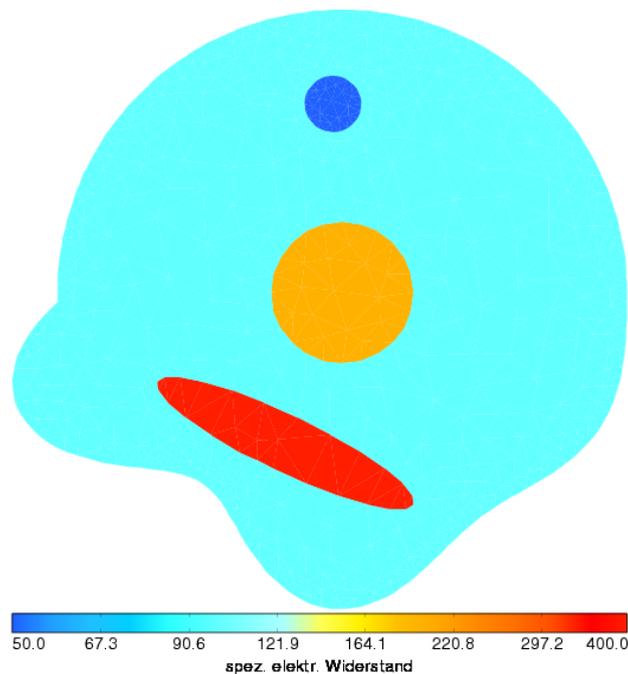


Abbildung 1: Ein synthetisches Modell

Während die obere Hälfte Kreisform besitzt, weist die untere Hälfte des Modells deutliche Undulationen der Baumform auf, die nicht ungewöhnlich sind. Abbildung 2 zeigt links die synthetischen Dipol-Dipol-Daten, die mit den analytischen k-Faktoren des Kreises berechnet wurden.

Dabei fällt auf, dass an den Wölbungen des Baumes erhöhte Widerstände auftreten, während die Höhlungen mit geringen Widerständen verbunden sind. Durch die Simulation auf dem Primärgitter wird der Topographieeffekt (Mitte) berechnet, der eine ähnliche gleiche Charakteristik aufweist. Aus den Werten werden Konfigurationsfaktoren berechnet und zur

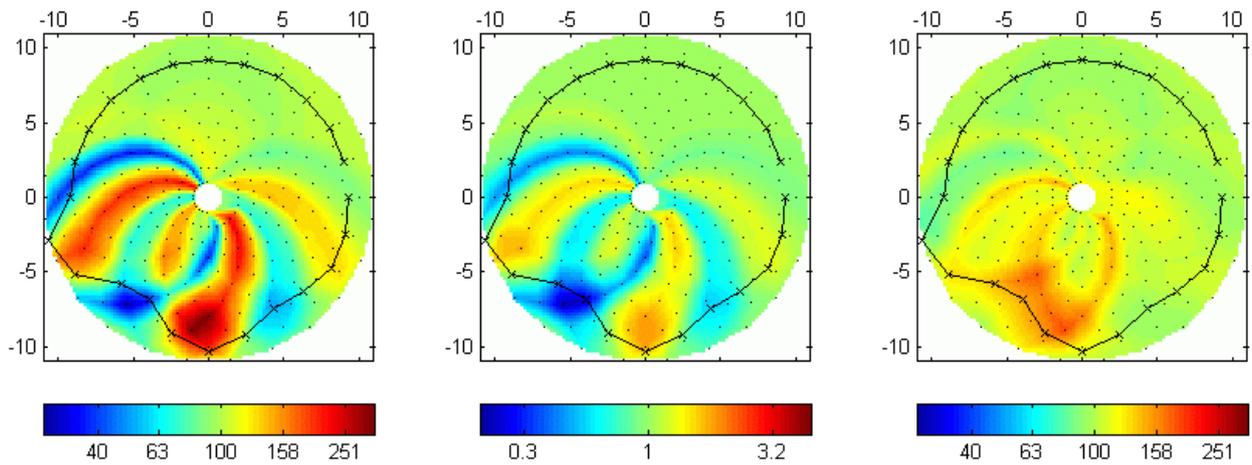


Abbildung 2: Daten (links), Topographieeffekt (Mitte) und korrigierte Daten (rechts) für das synthetische Modell

Darstellung der korrigierten Daten (rechts) benutzt. Die durch die Baumform verursachten Artefakte sind verschwunden und zumindest hochohmige Anomalien erkennbar.

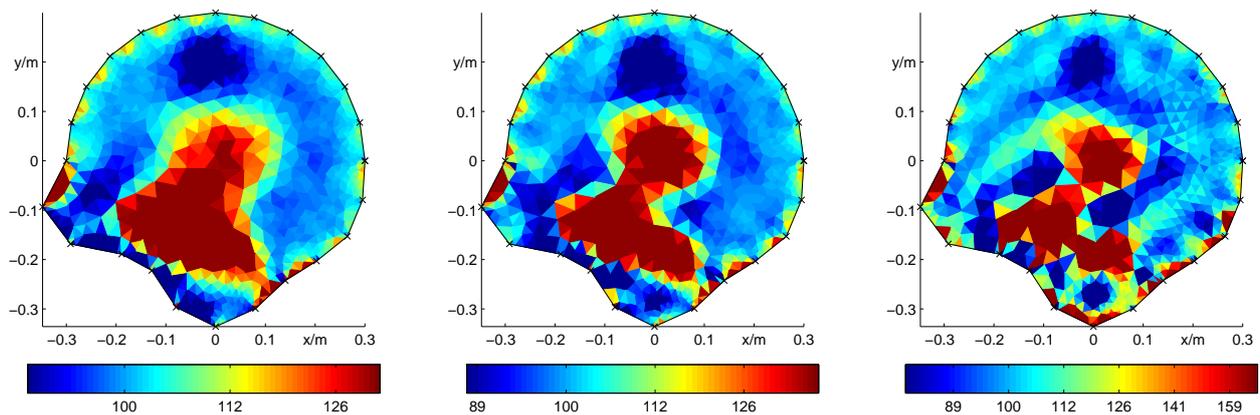


Abbildung 3: Inversionsergebnisse für Werte von $\lambda = 30$ (links), 3 (Mitte) und 0.3 (rechts)

Abbildung 3 zeigt die Inversionsergebnisse für drei verschiedene Werte des Regularisierungsparameters λ . Der hohe Wert von $\lambda =$ (links) erzeugt ein relativ glattes Modell, welches die wesentlichen Strukturmerkmale, aber sehr geringe Widerstandskontraste aufweist. Beim mittleren Bild sind die Kontraste wesentlich stärker ausgeprägt, man sieht deutlich alle drei Störkörper, auch wenn die beiden hochohmigen nicht vollständig getrennt werden können. Die Wahl eines zu kleinen Regularisierungsparameters kann allerdings zu Artefakten führen, die nicht dem Auflösungsvermögen der Messung entsprechen. Der optimale Wert liegt für die meisten Datensätze zwischen 10 und 30. Gute Datensätze können auch mit Werten unter 10 erklärt werden, während für schlechte Datensätze Regularisierungsparameter von mehreren hundert benötigt werden.

Abbildung 4 zeigt das Ergebnis der Inversion mit der „blocky model“-Option, durch die das synthetische Modell am besten reproduziert werden kann. In allen Fällen entstehen oft Artefakte direkt am Rand, die auf eine unzureichende Diskretisierung zurück geführt werden

können, aber selten von Bedeutung für die Interpretation sind.

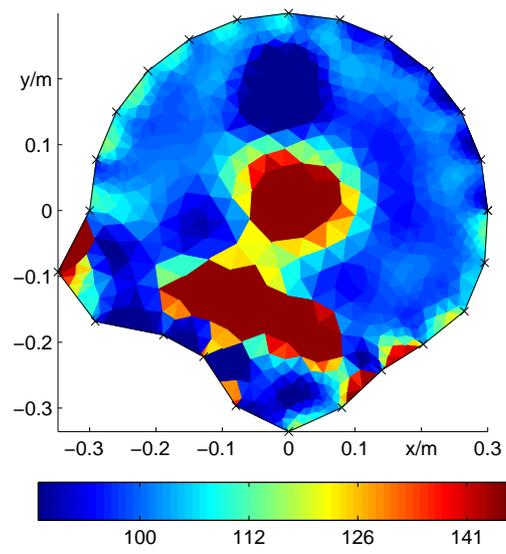


Abbildung 4: Ergebnis der Inversion mit „blocky model“